

第2章 建築物床版の音響域振動解析

2.1 建築物床版振動の既往研究と当研究での音響域振動解析の概要

本章では、建築物床版の新たな音響域振動解析手法の理論と精度検討結果を示す。その始めとして、建築物床版の振動解析の概要とこれまでの関連研究の流れを示し、既往研究との比較において、当研究方法の特徴を明確化する。また、一般的な構造振動と当研究の対象である音響域振動の相違についても簡単に言及している。

2.1.1 板の振動解析の概要

板の振動に関する研究は、洋の東西を問わずこれまで極めて多数の研究が行われ、その成果が報告されている。例えば、Leissa¹⁾は、本人による研究成果はもとより、以前に発表された板の自由振動に関する各種の研究報告・文献を網羅した資料²⁾もまとめている。我が国においても、板の振動に関する研究は極めて盛んであり、建築分野のみならず、機械、造船、航空宇宙、音響などの各分野で精力的に進められており、これらの結果は、各種のハンドブック類³⁾、便覧⁴⁾としてまとめられている。

板の振動解析には、固有値解析と応答解析の2つがある。固有値解析は、振動系としての固有振動数と固有モードを求めるものであり、振動の基本性状を究明するためのものである。応答解析は、具体的な加振力が入力した時の、系の挙動を解析するものであり、時系列応答波形や応答スペクトルの形で結果が得られる。固有値解析の古典的な解法としては、レイリー法、レイリー・リツツ法、ガラーキン法などがあるが、これらは比較的条件のシンプルなものにしか適用できない。そのため、現在ではコンピューターを用いたマトリクス解析法が主流となっており、このための固有値解析手法⁵⁾が各種開発されている。応答解析の方法は、大きく分けて時刻歴応答解析と周波数応答解析があり、各々一長一短がある。時刻歴応答解析は、振動応答に関する運動方程式（微分方程式）を時間刻み毎に直接積分計算してゆく方法であり、時間積分法とも呼ばれる。これに対し、周波数応答はスペクトル毎に計算してゆく方法であり、基本的には固有値解析で求められた固有値と固有モード（固有ベクトル）の重畳として解析される。

2.1.2 数値計算法による振動解析

板の応力あるいは振動に関する古典的・純理論的な研究は、ほぼ到達の時期に入り、その後は実用性に重点が移り、より幅広い適用性と高精度を兼ね備えた解析手法が求められるようになり、コンピューターの急速な普及発展とあいまって登場してきたのが有限要素法⁶⁾に代表される数値計算手法である。数値計算手法では一般に次のような解析プロセスが取られる。まず連続体または複数の部材からなる複合材を、仮想的に小さな部分（分割要素）に離散化し、この離散化された部分についてまず力学的条件を満足させ、これら相互の連続条件を満足させる形で、全体系のマトリクスを構成する。これに解析条件としての境界条件を考慮して得られる連立方程式を、逆マトリクス演算として解き、求める未知変位を算出する。現在最も汎用されている方法である有限要素法では、分割要素内の変位を

線形多項式で近似して解析を行う。同様の方法としては、板の1方向の変位をsin関数の級数展開形式で表す有限帶板法（Finite Strip Method）^{7), 8)}がある。また、支配方程式を直接差分化し、これを分割要素に適用してマトリクスを構成する有限差分法（Finite Diferencial Method）^{9), 10)}や、系を支配する微分方程式を、これと等価な境界上の積分方程式に変換して解析する境界要素法（Boundary Element Method）^{11), 12)}などがある。また、これらを組み合わせた解析法も開発され、種々の解析対象に適用されている。とくに、境界要素法は境界のみを対象とするため、2次元物体は1次元問題として、3次元物体は2次元問題として扱えるため、コンピューターの容量と解析時間を小さくできるとして、近年急速に普及している。しかし、板の振動などの2次元物体に関しては、解析モデルによっては必ずしもコンピューター容量や解析時間が短縮されるといえない点もある。これら各種の方法のなかで、実際に利用されている汎用度を較べると、FEMは他の方法を凌駕した存在となっており、これは有限要素法のもつ解析理論の明解さと適用性の広さによるものであると言える¹³⁾。

2.1.3 建築物床版の振動解析について

建築物の床版は、一般的に板と梁（棒材）との複合構造であり、単に板材だけで構成されていることは希である。これらの複合構造としては、各種の合成床版、デッキプレート床版、フラットスラブなど多種多様なものが存在するが、このうち最も代表的な構造はRC構造の小梁付床版であると言える。この小梁付床版の応力に関する基本的、かつ代表的な論文として、坪井¹⁴⁾による「T梁に関する理論的研究」がある。これは、T梁を板部と梁部に分け、それらの応力と歪の断面内の連続条件から、曲げに関する平版応力（面外応力）と面内の応力である平面応力を解析的に求めたものであり、これらの2つの応力から梁部だけでなく板部全体の応力の分布が求められる。床版に関する構造解析の分野では、この板部の応力分布の影響を、T梁の有効幅という形で考慮し、梁のみに組み込む方法を探っている。これらの成果は現在でも「鉄筋コンクリート構造設計指針」の中に活かされている。この坪井の論文の他にも、梁付きの板に関する研究論文が数多く見られるが、基本的には、この坪井の論文により小梁付床版の応力性状に関する現象説明と基本的な解析理論の構成が示されたと言える。ただし、静的な応力-ひずみ解析では上記の有効幅としての取扱いでは問題はないが、動的な問題すなわち振動解析に関しては、このような補剛効果の集中定数的な取扱いには問題があり、あくまで分布定数的取扱いが必要となってくる。

現在一般的に利用されているFEMの板振動解析プログラムの殆どは、平板理論に基づくものである。すなわち、微少変位理論の仮定により板部に関しては曲げ応力のみを考慮し、梁や棒材のついた場合にも、入力データ上の板厚を変化させるか、その梁部分のみの面内応力を付加するのみとなっている。一部には、T梁の有効幅や面内力が全く考慮されていない報告¹⁵⁾や、中立軸を重心軸に固定して計算したT梁の断面2次モーメントの増加率を梁に寄与させているもの¹⁶⁾、曲げと面内の応力が非連成として扱われているもの¹⁷⁾がみられる。T梁の理論に示されるように、曲げ応力と面内応力は連成するものであり、上記のような取扱いは小梁付床版や合成床版の実際の応力状態とはかなり異なるものである。ごく低次の振動モードのみを対象とする構造振動あるいは体感振動の場合には、このよ

うな簡易な取扱いでも十分な場合もあるが（基本的に現象を表現できていないことにはかわりはないが）、音響放射を前提とした音響域振動の解析においては、このような簡易な取扱いはできない。また、床の構造が複雑になればなるほど、簡易化したことによる誤差の影響が累積されることになり、適用精度の低下と混入誤差評価の困難さを伴うことになる。したがって、実用性と汎用性の観点から、現在の板振動解析プログラムは十分なものとは言えない。

2.1.4 断面急変板の解析

断面が連続的に変化する変厚板¹⁸⁾と区別するため、小梁付床版など断面の一部が変化する板を、ここでは断面急変板と呼ぶ。この断面急変板を分類すると図-2.1のように3つのタイプに分けられる。

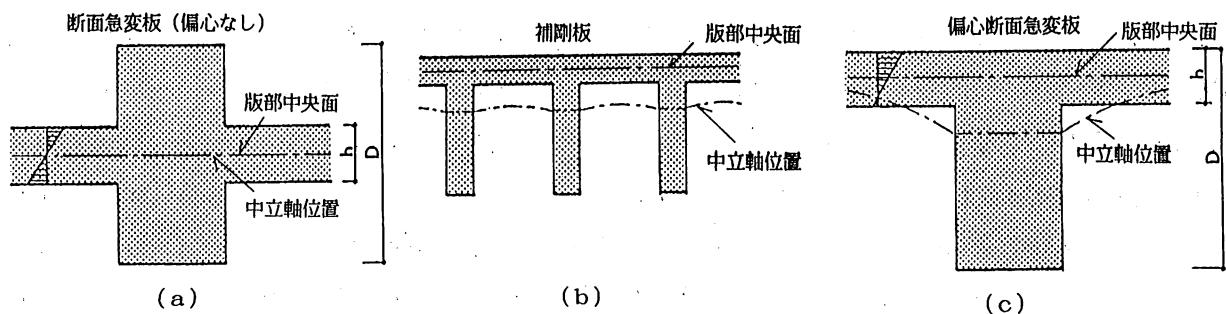


図-2.1 断面急変板の分類と中立軸位置

(a) は、断面の変化はあるがその変化が両側に均等にある場合であり、この場合には曲げ変位または曲げ振動時にも断面の中立軸は常に断面中央面に一致している。平板理論のFEM解析プログラムなどで、入力条件として単に板厚だけを変化させて計算するのは、この構造のモデルを扱っていることになる。(b) は、一般にリブ付き板と呼ばれるものである。この場合には、リブの間隔がある程度小さければ、等価な断面性能を有する平板と見なすことができる。したがって、リブが1方向の場合または2方向で条件が異なる場合には、構造的異方性板としての解析が可能となる。2方向ともにリブの条件が等しい場合には、等方性板としての解析が可能である。したがって、このようなリブ付き板に関しては、過去に解析的研究^{19), 20)}が多く見られる。もちろん、分割を細かくすれば、FEMなどの数値計算手法も適用が可能である。(c) は、通常の小梁付床版や合成床版の状態である。(c)のような構造の特徴を整理すると、次の3つが挙げられる。

- 1) 板厚が連続的に変化する変厚板と異なり、板厚が急変する板であること。
- 2) 急変する部分が片側だけであり、したがって中立軸が変化すること。
- 3) 通常のリブ付き板のようにリブが連続しておらず断面変化が局部的であること。したがって単純に構造的異方性板としては扱えないこと。

以上の3点とも、解析がかなり複雑となる要因であり、この内容に関しては後の項で詳述するが、厳密には3次元の解析が必要となる。

変厚板および断面急変板の振動解析の主な流れを辿ってみると以下のようになる。Kirk²¹⁾は、角断面とT型断面のリブが付いた板の固有振動数を扱い、平板の時の固有振動数に対する倍率をRitz法により計算している。しかし、ここでは面内力が全く考慮されていず、そのためリブが付くと固有振

動数が下がるという奇妙な結果（リブの回転慣性の影響としている）も現れている。Aksu²²⁾は、スチフナー付き板を対象として、Ritz法に基づくエネルギー関係式を有限差分法により解析している。ここでは、スチフナーの偏心位置を仮定した面内変位(inplane deformation)の考慮を行っている。しかし、面内変位と面外変位の連成は考慮されていない。論文でも、実際より剛性が小さく現れることを認めており、これに関する更なる検討が必要であると述べている。Olson²³⁾は、梁付き板の固有振動数および固有モードを、エネルギー原理に基づきを有限要素法で定式化を行い、レーザーホログラフィーによる実験結果と比較し、良く一致した結果を示している。ここでは面外の曲げ変位は5次の多項式、面内変位は3次の多項式が用いられており、面外変位と面内変位の連成が考慮されている。ただし、梁は厚みのない線材として扱われており、その断面2次モーメントは、板と梁との接合面（この面を基準面としている）からの偏心量(e)を用いて算出している。すなわち、すべてのモードに関して中立軸を固定して考えており、厳密には実際の現象と仮定的な違いがあるといえる。Gupta²⁴⁾は、減衰を考慮した梁(stringers)付き板の固有値解析を、有限要素法により行っている。有限要素法の定式化方法はOlsonと同じであることから、同様の問題点を含んでいると言える。また、Koko and Olson²⁵⁾は、super finite elementを用いたリブ付き板の固有振動解析を示している。これは、要素の変数を増やしてリブで囲まれた部分を1要素として扱う方法であるが、リブの扱いは先のOlsonの論文と同じく、偏心量を設定して扱いとなっている。

当研究では、本来3次元解析が必要となる小梁付床版や合成床版などの断面急変板を、2次元解析として取扱う方法を考慮している。基本的には、坪井によるT梁に関する解析的方法を、FEMの解析手法で表現した形といえ、面外応力と面内応力を連成させることにより、版面全体の断面中立軸の移動を解析過程のなかに反映させ、断面急変板の応力ひずみ関係を表現している。また、当研究の方法に比較的近いものとして、土橋ら^{26), 27)}のように版を薄層の集合体として扱う積層要素法があり、板の大撓みなどの非線形解析に適用している。

このような中立軸の移動を考慮した精密な解析方法、およびその取扱いの必要性は、一般の構造振動に置ける場合より当研究の音響域振動に関する場合の方が大きくなる。

2.1.5 構造振動と音響域振動

これまでのFEMによる床版の振動解析の殆どは、低次の2、3の固有振動のみを対象としたもの、すなわち構造振動または体感振動の研究であった。周波数で言えばせいぜい30～40Hzが上限であると言える。一方、固体音問題など音響放射を前提とした振動、すなわち音響域振動では、周波数帯域は20Hz以上の可聴周波数を対象とするため、個々の固有モードの性質が卓越する低周波数域（固有モード振動領域）から、多数のモードが密に存在する中・高音域（拡散振動領域）までを含むことになる。音響域振動の評価手法としては、既に述べたように、これらモード振動領域から拡散振動領域までを統一的に扱えることが必要であり、とくに低音域のモード振動領域では、板の振動振幅だけでなく、音響放射量の決定要因である振動モードを正確に求めることが必要となる。また、固体音問題を周波数に関して低音域現象と高音域現象に分けると、問題発生の頻度や対策等の困難さなどから、低音域

現象の方が遙かに問題化しやすいと言え、この周波数領域を対象として、応答振動量および振動モードを精度良く求められる解析方法が必要となる。

2.1.6 当解析手法の特徴と本章の構成

当解析手法の特徴と本章での内容をまとめたものを図-2.2に示した。床版は、その断面の形状で平板と変断面板に大きく分けられ、平板の場合には、一般的に行われている微小変位理論に基づく曲げ（面外変位）解析で十分である。変断面板の場合には、面外応力だけでなく面内の応力も発生していくが、これを面外応力と非連成として扱うと、小梁付床版などでは断面性能を小さく見積りすぎるこ

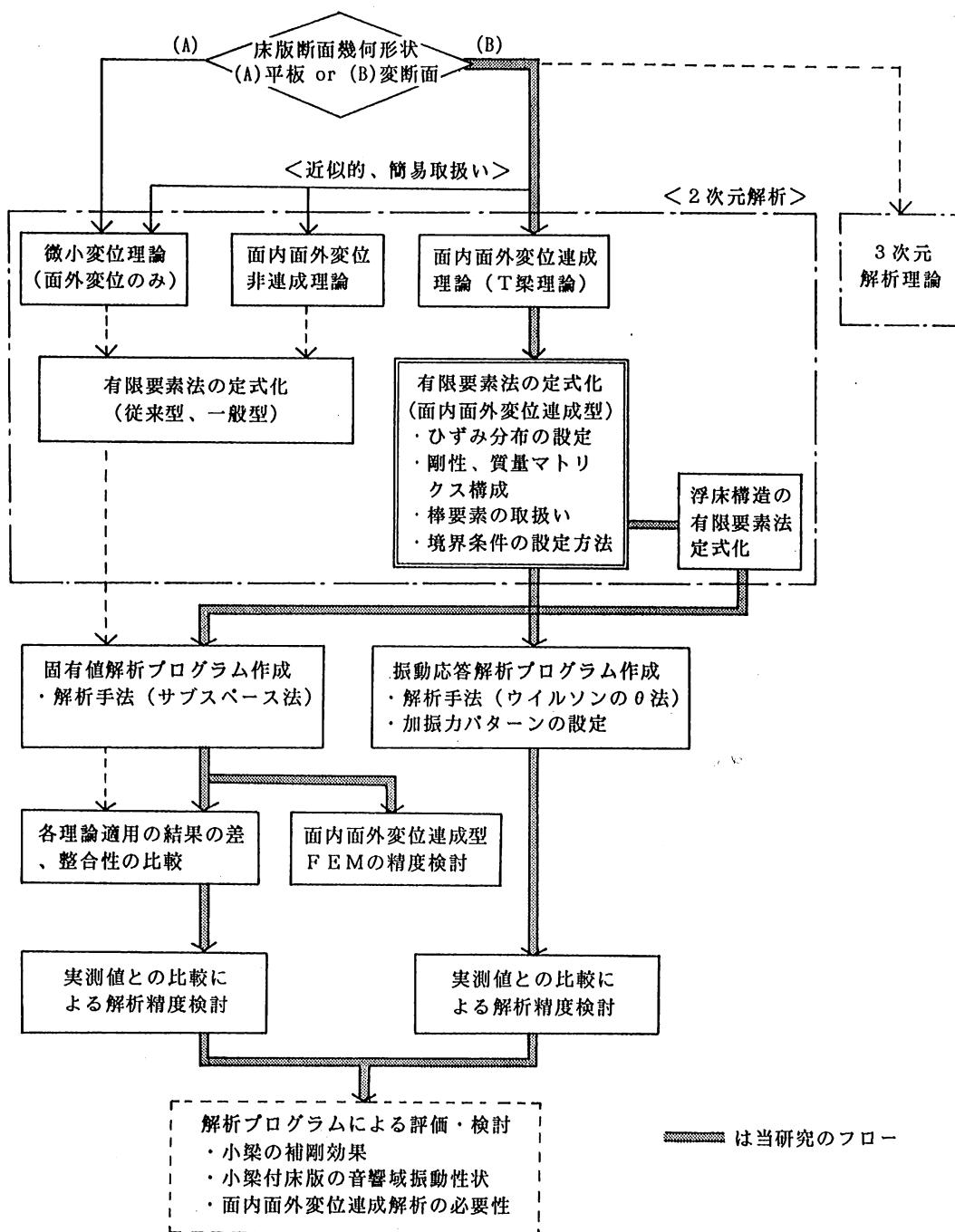


図-2.2 解析手法の特徴と論文の構成

とになる。実際の応力状態は、面外と面内の応力（または変位）が互いに連成しており、これを理論的に取り扱ったのがT梁理論である。当研究の方法は、これを有限要素法を用いて定式化したものに相当し、本来3次元解析が必要なものを2次元解析として扱えるため、解析時間、コンピューターの容量、入力データの作成など種々の面で有利となる。また、ここでは面内変位と面外変位が別々に求まるので、これより断面中立軸の分布を計算することができる。これは、板の各部の剛性分布を詳細に調べるのに極めて有利であり、変断面板の振動性状評価に大いに役立つと言える。

本研究では固有値解析と振動応答解析の2つのプログラムを作成し、理論値あるいは実測値との比較を通して、当手法の妥当性と有用性を評価している。また、固体音の対策工法として良く用いられる浮床構造に関しても、同様に有限要素法による定式化と解析プログラムの作成を行っている。

2.2 小梁付床版に代表される断面急変板の応力特性

小梁等を有する床版では、微少たわみの場合でも、平板の曲げに依存する応力（以後、平板曲げ応力と呼ぶ。坪井の論文では平版応力）の他に、版部と小梁部の接合部に生じるせん断力のために、小梁方向の面内軸応力が発生する。平板曲げ応力とこの面内応力が完全に分離されると仮定した場合には、小梁部に発生する応力を偏心軸応力とみなす平面応力問題として解かれる。ところが、建築物の床版を考えた場合、面内応力に対する版部の曲げの影響が無視しえず、図-2.3に示すように面内応力と平板曲げ応力が連成することとなる。この場合の解析法が坪井博士のT梁理論であり、その論文¹⁴⁾では2種の境界条件に関する解が示されている。建築構造の分野では、この時の面内応力による影響の範囲をT梁の有効幅として算出し、これを断面2次モーメントの増加率として計算に用いている。これは、本来版部における面内応力と平板曲げ応力の連成効果を、簡便のため梁部のみに寄与させて取り扱う方法であり、静的問題には適用できるが、動的問題とくに音響域振動に関しては適切とは言えない。

2.2.1 単純支持小梁付床版の応力性状の計算

ここでは、まず静的問題として小梁付床版の応力性状について説明する。坪井の論文¹⁴⁾では、単純梁と連続梁の2種の解が示されている。この解析方法の流れに準じて、境界条件が四周単純支持である矩形板についての解を求め、その結果により面内応力の振動性状に対する影響を概観する。単純支持の場合の解は以下の通りとなる。なお、ここでの記号、座標等は坪井の文献に準じている。

1) 平面応力系

平面応力に関しては、T梁の単純梁の結果がそのまま用いられる。すなわち、 $y = l_y/2$ において $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ である。

2) 平版応力系

境界条件は、単純支持により、

$$y = l_y/2 \text{ において } w = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{ただし } \left(\frac{1}{m} = 0 \right) \quad (2.1)$$

今、たわみの適合解を

$$w_n = \left(A'_n \cosh \eta_n + B'_n \eta_n \sinh \eta_n + C'_n \sinh \eta_n + D'_n \eta_n \cosh \eta_n + \frac{1}{N} \frac{P l_x^4}{\eta^4 \pi^4} f_n \right) \sin \xi_n \quad (2.2)$$

とおく。構造、荷重の対称性を考慮すれば、

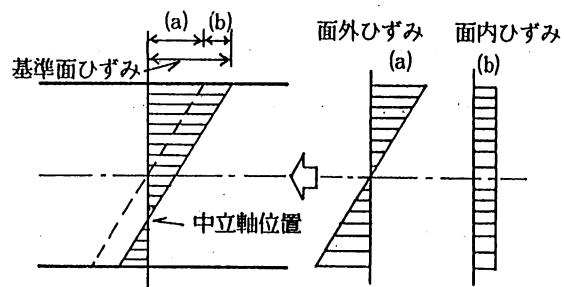


図-2.3 面内ひずみと面外ひずみの連成関係

$$\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_{y=0} = 0 \quad \text{より } C'_n + D'_n = 0 \quad (2.3)$$

また、式(2.1)の条件より、

$$A'_n \cosh \alpha_n + B'_n \alpha_n \sinh \alpha_n + C'_n \sinh \alpha_n + D'_n \alpha_n \cosh \alpha_n + P_n = 0 \quad (2.4)$$

$$A'_n \cosh \alpha_n + B'_n (2 \cosh \alpha_n + \alpha_n \sinh \alpha_n) + C'_n \sinh \alpha_n + D'_n (2 \sinh \alpha_n + \alpha_n \cosh \alpha_n) = 0 \quad (2.5)$$

ただし、

$$\alpha_n = \eta_n \frac{l_y}{2} = \frac{n \pi (l_y - b)}{2 l_x} , \quad P_n = \frac{1}{N} \frac{p l_x^4}{n^4 \pi^4} f_n \quad (2.6)$$

式(2.3)より、

$$D'_n = -C'_n \quad (2.7)$$

これを、式(2.4)、式(2.5)に代入して整理すると、

$$B_n = C'_n \tanh \alpha_n + \frac{P_n}{2 \cosh \alpha_n} \quad (2.8)$$

$$A'_n = -C'_n (\alpha_n \tanh^2 \alpha_n + \tanh \alpha_n - \alpha_n) - P_n \left(\frac{1 + \frac{\alpha_n}{2} \tanh \alpha_n}{\cosh \alpha_n} \right) \quad (2.9)$$

ここで、仮想分割した部分の連続条件

$$W_{y=0}^{I'} = W_{y=0}^{II} = W_{y=0}^{III} \quad (2.10)$$

に関して、式(2.2)より、

$$W_{y=0}^{I'} = [A'_n + P_n] \sin \xi_n \quad (2.11)$$

式(2.9)より、

$$\delta'_n = \alpha_n \tanh^2 \alpha_n + \tanh \alpha_n - \alpha_n \quad (2.12)$$

とおけば、

$$W_{y=0}^{I'} = \left[-\delta'_n C'_n - P_n \left(\frac{1 + \frac{\alpha_n}{2} \tanh \alpha_n}{\cosh \alpha_n} - 1 \right) \right] \sin \xi_n \quad (2.13)$$

T梁の解析同様に、

$$\delta_n = \frac{n \pi b}{l_x} \delta'_n , \quad C' = \frac{p b l_x^3}{n^3 \pi^3 N} C'_n \quad (2.14)$$

とおき、更に

$$\bar{f}_n = - \left(\frac{1 + \frac{\alpha_n}{2} \tanh \alpha_n}{\cosh \alpha_n} - 1 \right) f_n \quad (2.15)$$

とすれば、

$$-\delta_n C_n + \bar{f}_n = 4C'_n + \nu g_n - k_n + f'_n = \nu^3 (g_n + k_n) \quad (2.16)$$

の関係が成立し、したがってT梁の計算結果をそのまま用いることになります、単純支持の

解が得られることになる。

以上の結果を整理し、T梁での結果と併せて示せば次のようになる。

<条件>

辺長 $l_x \times l_y$, 小梁 $b \times (h+H)$, $\nu = h/H$

荷重 $\sin \frac{n\pi x}{l_x}$ 形の 版上 $p f_n \sin \frac{n\pi x}{l_x}$

分布荷重 梁上 $p f'_n \sin \frac{n\pi x}{l_x}$

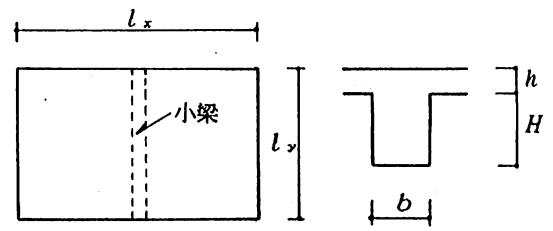


図-2.4 小梁付床版の記号

<平面応力の応力関数>

$$F_n = [A_n \cosh \eta_n + B_n \eta_n \sinh \eta_n + C_n \sinh \eta_n + D_n \eta_n \cosh \eta_n] \sin \xi_n$$

$$A_n = -\frac{\sinh^2 \alpha_n + \alpha_n}{\cosh \alpha_n \sinh \alpha_n + \alpha_n} C_n$$

$$B_n = -\frac{\cosh^2 \alpha_n + 1}{\cosh \alpha_n \sinh \alpha_n + \alpha_n} C_n , \quad D_n = C_n$$

$$C_n = \frac{p b l_x^3}{n^3 \pi^3 h H} \{-6\nu(1+\nu)(4\bar{f}_n + \delta_n f'_n) \psi_n^{-1}\}$$

<平版応力のたわみ関数>

$$w_n = \left[A'_n \cosh \eta_n + B'_n \eta_n \sinh \eta_n + C'_n \sinh \eta_n + D'_n \eta_n \cosh \eta_n + \frac{1}{N} \frac{p l_x^4}{n^4 \pi^4} f_n \right] \sin \xi_n$$

$$A'_n = -(\alpha_n \tanh^2 \alpha_n + \tanh \alpha_n - \alpha_n) C'_n - \frac{1}{N} \frac{p l_x^4 f_n}{n^4 \pi^4} \left(\frac{1 + \frac{\alpha_n}{2} \tanh \alpha_n}{\cosh \alpha_n} \right)$$

$$B'_n = \tanh \alpha_n C'_n + \frac{p l_x^4 f_n}{2N n^4 \pi^4 \cosh \alpha_n} , \quad D'_n = -C'_n$$

$$C'_n = \frac{p b l_x^3}{n^3 \pi^3 N} \times$$

$$[(1+\nu)(4\nu(4+2\nu+\nu^2)+(1+\nu)^3 \gamma_n) \bar{f}_n - \nu^3 (4\nu+(1+\nu)\gamma_n) f'_n] \psi_n^{-1}$$

<その他>

$$\xi_n = \frac{n\pi x}{l_x} , \quad \eta_n = \frac{n\pi y}{l_x} , \quad \alpha_n = \frac{n\pi(l_y - b)}{2l_x} , \quad (N = E h^3 / 12)$$

$$\delta_n = \frac{n\pi b}{l_x} (\alpha_n \tanh^2 \alpha_n + \tanh \alpha_n - \alpha_n)$$

$$\bar{f}_n = \left(1 - \frac{1 + \frac{\alpha_n}{2} \tanh \alpha_n}{\cosh \alpha_n} \right) f_n$$

$$\gamma_n = \frac{n\pi b}{l_s} \frac{3\cosh^2 \alpha_n + \alpha_n^2 + 1}{\cosh \alpha_n \sinh \alpha_n + \alpha_n}$$

$$\psi_n = 16\nu^4 + 4\nu^3(1+\nu)\gamma_n + 4\nu(1+\nu)(4+2\nu+\nu^2)\delta_n + (1+\nu)^4\gamma_n\delta_n$$

2.2.2 計算結果および性状

これらの式を用いて小梁方向の静的な変位モードの影響を計算する。図-2.5は、小梁方向の変位モードが1, 3, 5次となる場合であり、このモードの形と一致した分布荷重を与えた時の結果である。応力、たわみは最大値で規格化してある。1次モードにおいて面内応力 σ_x はほぼ版部全域にわたり広く分布するのに較べ、モードが高次になるにしたがい小梁近傍のみに分布する形となる。これらを中立軸の移動として捉えると図-2.5の上図となる。中立軸の断面の中央面からのずれが大きい部分ほど、曲げに対する剛性が高まっていることを示している。図-2.5の結果より、小梁の版部に対する補剛効果は、1次モードでは版部全体に大きく寄与するが、高次モードにおいては版部には殆ど寄与しなくなることがわかる。

すなわち、版の振動に対しては、小梁方向のモードにより低周波数域と高周波数域で梁の補剛効果に差を生じることになる。このことは、小梁付床版の小梁方向および小梁直交方向の振動伝搬速度の実測例によっても示される。図-2.6は、図-2.7に示す小梁が2本付いたRC床版での曲げ波の伝搬速度の実測例である。31.5Hzの低周波数域では、両方向の伝搬速度には差があり、明らかに小梁方向の方が伝搬速度が速い。すなわち、小梁方向の方が剛性が高いことを示している。一方、250Hzの帯域になると、両者の伝搬速度には殆ど差が見られなくなる。図中の点線は、版の厚みを版および小梁の厚みとしたときの、式(2.17)による曲げ波の位相速度の計算値であり、群速度の場合は位相速度の2倍²⁸⁾となる。

$$C_b = \sqrt{\frac{\pi c_i h f}{\sqrt{3}}} \quad (2.17)$$

以上の結果をまとめると、次のようになる。

- 1) 小梁付床版のような偏心した断面急変板が曲げを受けた場合、板の中立軸は断面変化部の偏心方向に変移した形となる。

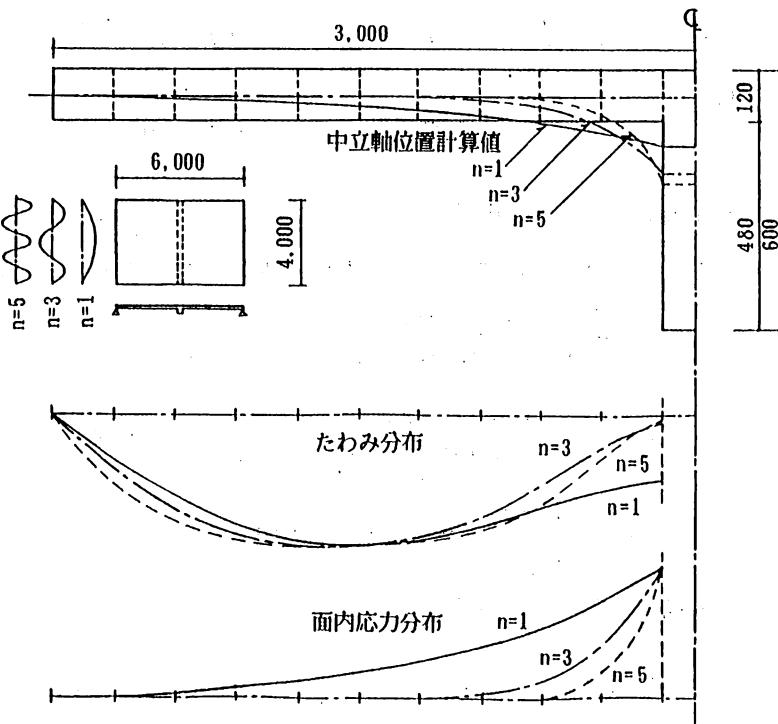


図-2.5 小梁付床版の静的解析結果

2) この状態の応力を図-2.3のごとく、版部中央面に関する曲げ応力と面内方向の軸応力に分けて考えた場合、平板においては微少変位理論の仮定のもとで無視した面内応力が、偏心した断面急変板では無視し得ず、かつ、この両応力は中立軸の位置がたわみの大小に係わらず一定であるという条件下で達成する。

3) 面内応力の版内の分布は、小梁方向のたわみモードの次数によって変化する。すなわち、次数が低いときは、面内応力は版部全体にわたり広く分布するのにくらべ、高次になると、断面変株の近傍のみに分布する形となる。これに応じて、中立軸の位置も同様の分布となる。

4) この状態を、板の振動における小梁（断面急変部）の版部に対する補剛効果として捉えると、低次の振動モードにおいては小梁の補剛効果は版部に広く波及するのに較べ、高次の振動モードにおいては、断面急変部近傍のみの補剛効果しか持たないといえる。すなわち、小梁の版部に対する補剛効果の範囲は振動数に依存する。

5) 静的問題、とくに構造力学の分野では、これら面内応力の影響をT梁の断面2次モーメントの増加率として評価しているが、これは本来版部全体に分布すべき補剛効果が梁部のみに寄与していることになるため、このような扱いを振動問題に適用するのは適当ではない。また、この増加率の値自体が振動数により変化するものであるため、1次のモードを対象とする場合以外は、適正な値を設定することができない。

6) したがって、振動問題においては、解析手法自体が振動モードに対応した中立軸の移動を表現できるものであることが必要であり、面内成分と面外成分の連成解析が必要である。

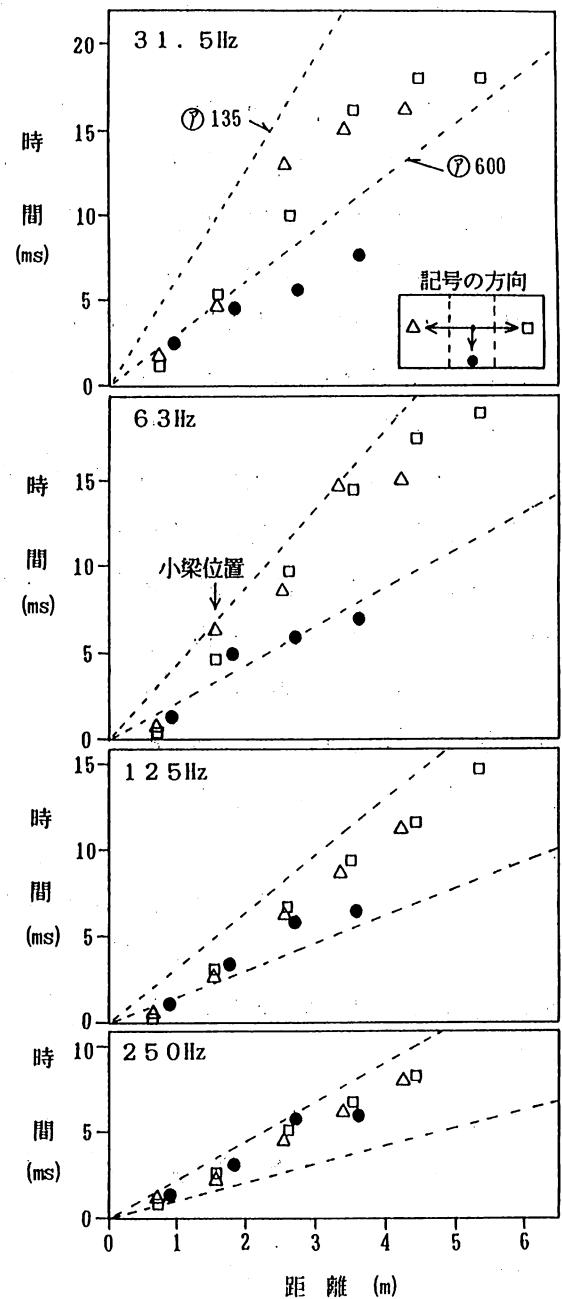


図-2.6 小梁付床版での小梁方向・小梁直角方向の曲げ波の伝搬速度実測例

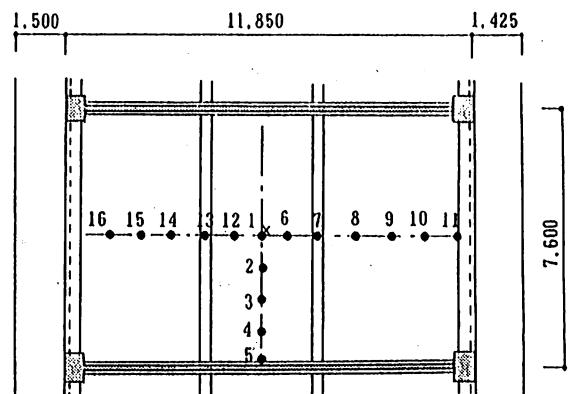


図-2.7 曲げ波伝搬速度の実測小梁付床版と振動測定点

2.3 偏心断面急変板に対する面内面外連成有限要素法の定式化

小梁付床版のように断面変化が片側だけの場合、ここではこれを偏心断面急変板と呼ぶ。偏心断面急変板には、小梁付床版の他、断面変化部の幅が小梁付床版ほど小さくない、いわゆる変厚板と呼ばれるもの、あるいは、断面変化部が断続的に並んだ補剛板、あるいは2方向に補剛されたラチススラブなど様々なものがある。当方法では、平板はもとより、これら各種の断面急変板の応力-ひずみ性状の表現が可能であるとともに、原理的には、任意の多段の断面急変板を2次元問題として取り扱うことができる。

ここでは、小梁付床版を主な対象として有限要素法の定式化について述べる。解析の前提として、弾性範囲内において次のような仮定を置く。

1) 図-2.8に示すように、小梁部を版部と同厚

の(I)部と、断面変化部の(II)部に分け、(I)部に関しては版部と同じくxy面での平面応力状態、(II)部では小梁方向(図-2.9ではy方向)の軸力のみが存在する1軸応力状態が成立しているものとする。

2) 小梁が交差する部分では、(II)部においても平面応力状態が成立するものとする。

これらは、通常の実構造物床版では十分現実的な仮定といえる。

2.3.1 剛性マトリクスの構成

図-2.8、図-2.9に示す要素座標系とひずみ分布にもとづく、有限要素法の剛性マトリクスの構成方法について示す。

一般に、微少変位理論における断面内のひずみと変位の関係は次のように与えられる²⁹⁾。

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{2.18}$$

ここで、 u_0 、 v_0 はxy各方向の中央面での変位、 w は z 方向の変位(たわみ)である。今、面外変位

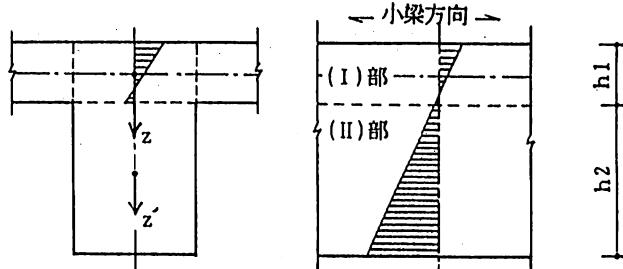


図-2.8 小梁部のひずみ分布の仮定

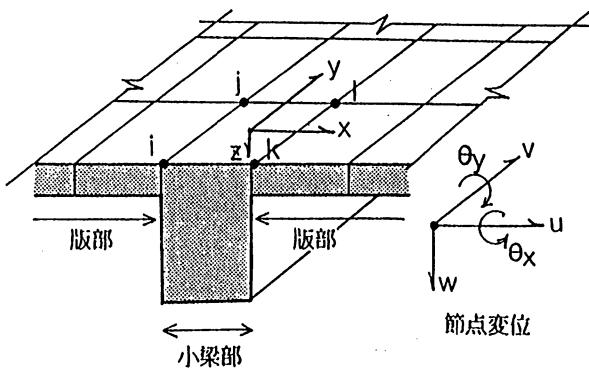


図-2.9 要素座標系と節点変位

(w , θ_x , θ_y) と面内変位 (u_0 , v_0) の連成関係を表現するため、要素節点の未知変位を版部上端面での値に設定し、これにより要素間の x y 方向の変位 (u , v) の連続性を確保するものとすると、式(2.18)は次のように表される。

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_P\} + \left(z + \frac{h_1}{2}\right)\{\varepsilon_B\} \quad (2.19)$$

$$\text{ここで、 } \{\varepsilon_P\} = \left[\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right]^T \quad (2.20)$$

$$\{\varepsilon_B\} = \left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]^T \quad (2.21)$$

$\{\varepsilon_P\}$ は面内変位によるひずみ成分、 $\{\varepsilon_B\}$ は面外変位によるひずみ成分を表している。変位関数は、面内未知変位については Argysis の式、

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x y \\ v &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 x y \end{aligned} \quad (2.22)$$

曲げに関しては、Andi, Clough および Melosh の式

$$\begin{aligned} w &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 x y + \beta_6 y^2 + \beta_7 x^3 \\ &\quad + \beta_8 x^2 y + \beta_9 x y^2 + \beta_{10} y^3 + \beta_{11} x^3 y + \beta_{12} x y^3 \end{aligned} \quad (2.23)$$

を用いた。なお、要素の変位成分は、

$$\{\delta\} = [\delta_P, \delta_B]^T = \left[u, v, w, -\frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial x} \right]^T \quad (2.24)$$

である。

式(2.22)、式(2.23)の変位関数を式(2.20)、式(2.21)に代入すれば、各々のひずみは次のようになる。

$$\{\varepsilon_P\} = [Q_P]\{\alpha\} = [Q_P][C_P]^{-1}\{\delta_P\} = [B_P]\{\delta_P\} \quad (2.25)$$

$$\{\varepsilon_B\} = [Q_B]\{\beta\} = [Q_B][C_B]^{-1}\{\delta_B\} = [B_B]\{\delta_B\} \quad (2.26)$$

(ただし $\{\delta_P\}$, $\{\delta_B\}$ は要素節点での変位を表す。)

(I) 部に関して、仮想仕事の原理を適用すれば (* は仮想変位、仮想ひずみを示す) 、 $\{F^*\}$ を等価節点力として、

$$\begin{aligned} \{\delta^*\}^* \{F^*\}^* &= \int_V \left(\{\varepsilon_P\}^* + \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \{\varepsilon_B\}^* \right)^T [D] \left(\{\varepsilon_P\} + \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \{\varepsilon_B\} \right) dV \\ &= \int_V \{\varepsilon_P\}^{*T} [D] \{\varepsilon_P\} dV + \int_V \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \{\varepsilon_P\}^{*T} [D] \{\varepsilon_B\} dV + \\ &\quad \int_V \left(z + \frac{h_1}{2} \right) \{\varepsilon_B\}^{*T} [D] \{\varepsilon_P\} dV + \int_V \left(z + \frac{h_1}{2} \right)^2 \{\varepsilon_B\}^{*T} [D] \{\varepsilon_B\} dV \end{aligned} \quad (2.27)$$

となる。ここで、

立

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad \gamma = \frac{1-\nu}{2} \quad (2.28)$$

である。式(2.27)に式(2.25)、式(2.26)を代入して整理すると、

$$\begin{aligned} \{\delta^*\}^* \{F^*\} &= \{\delta^S\}^{*T} [k_{PP}] \{\delta^S\} + \{\delta^S\}^{*T} [k_{PB}] \{\delta^B\} + \{\delta^S\}^{*T} [k_{BP}] \{\delta^B\} \\ &\quad + \{\delta^B\}^{*T} [k_{BB}] \{\delta^B\} \\ &= \{\delta^*\}^{*T} \begin{bmatrix} k_{PP} & k_{PB} \\ k_{BP} & k_{BB} \end{bmatrix} \{\delta^*\} \end{aligned} \quad (2.29)$$

となる。したがって、要素(I)の剛性マトリクスは、
(2.30)

$$[K_1] = \begin{bmatrix} k_{PP} & k_{PB} \\ k_{BP} & k_{BB} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [k_{PP}] &= \int_V [B_P]^T [D] [B_P] dV = h_1 [C_P]^{-1T} \iint [Q_P]^T [D] [Q_P] dx dy [C_P]^{-1} \\ [k_{PB}] &= \int_V \left(z + \frac{h_1}{2} \right) [B_P]^T [D] [B_B] dV = h_1 \frac{h_1}{2} [C_P]^{-1T} \iint [Q_P]^T [D] [Q_B] dx dy [C_B]^{-1} \\ [k_{BP}] &= [k_{PB}]^T \\ [k_{BB}] &= \int_V \left(z + \frac{h_1}{2} \right)^2 [B_B]^T [D] [B_B] dV \\ &= \left\{ \frac{h_1^3}{12} + h_1 \left(\frac{h_1}{2} \right)^2 \right\} [C_B]^{-1T} \iint [Q_B]^T [D] [Q_B] dx dy [C_B]^{-1} \end{aligned} \quad (2.31)$$

となる。 $[k_{PB}]$, $[k_{BP}]$ は面内変位と面外変位に関する連成項である。

次に、(II)部に関しては、小梁方向の(I)部と(II)部でのひずみの連続条件を考慮すると、
(y方向の小梁に関して)、

$$\{\epsilon^*\} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \left(z + \frac{2h_1+h_2}{2} \right) \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \left(z + \frac{2h_1+h_2}{2} \right) \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \end{array} \right\} \quad (2.32)$$

となり、(I)部と同様に展開すれば、

$$[K_2] = \begin{bmatrix} k'_{PP} & k'_{PB} \\ k'_{BP} & k'_{BB} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} [k'_{PP}] &= h_2 \iint [B'_P]^T [D] [B'_P] dx dy \\ [k'_{PB}] &= h_2 \frac{2h_1+h_2}{2} \iint [B'_P]^T [D] [B'_B] dx dy \end{aligned} \quad (2.34)$$

$$[k_{BB}] = \left\{ \frac{h_2^3}{12} + h \left(\frac{2h_1+h_2}{2} \right)^2 \right\} \int \int [B_B]^T [D] [B_B] dx dy$$

したがって、断面急変部の要素の剛性マトリクスは、(I) 部と(II) 部の剛性マトリクスを合わせて、

$$[K] = [K_1] + [K_2] \quad (2.35)$$

となる。

版部は(I) 部のみの剛性マトリクスであり、交差部は、式(2.32)の0の部分にひずみが存在するかたちの(II) 部となる。

各種マトリクスの計算結果は、2.9章にまとめて示した。

2.3.2 任意断面急変板に対する剛性マトリクスの汎用表示

これまで小梁付床版を対象として記述したが、ここでは任意の形状の断面急変板、あるいは変厚板などを取り扱うための剛性マトリクスの構成方法について示す。

断面方向に層別された要素の i 番目の層のひずみ分布を次のようにおく。

$$\begin{aligned}\varepsilon_{i,x} &= \alpha_x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \beta_x \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \varepsilon_{i,y} &= \alpha_y \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \beta_y \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \gamma_{i,xy} &= \alpha_y \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \alpha_x \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\beta_x + \beta_y}{2} \left(-2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)\end{aligned}\quad (2.36)$$

$\alpha_x, \beta_x, \alpha_y, \beta_y$ は面内、曲げのひずみにより決定される値であり、各々、版面上端からの距離 z の

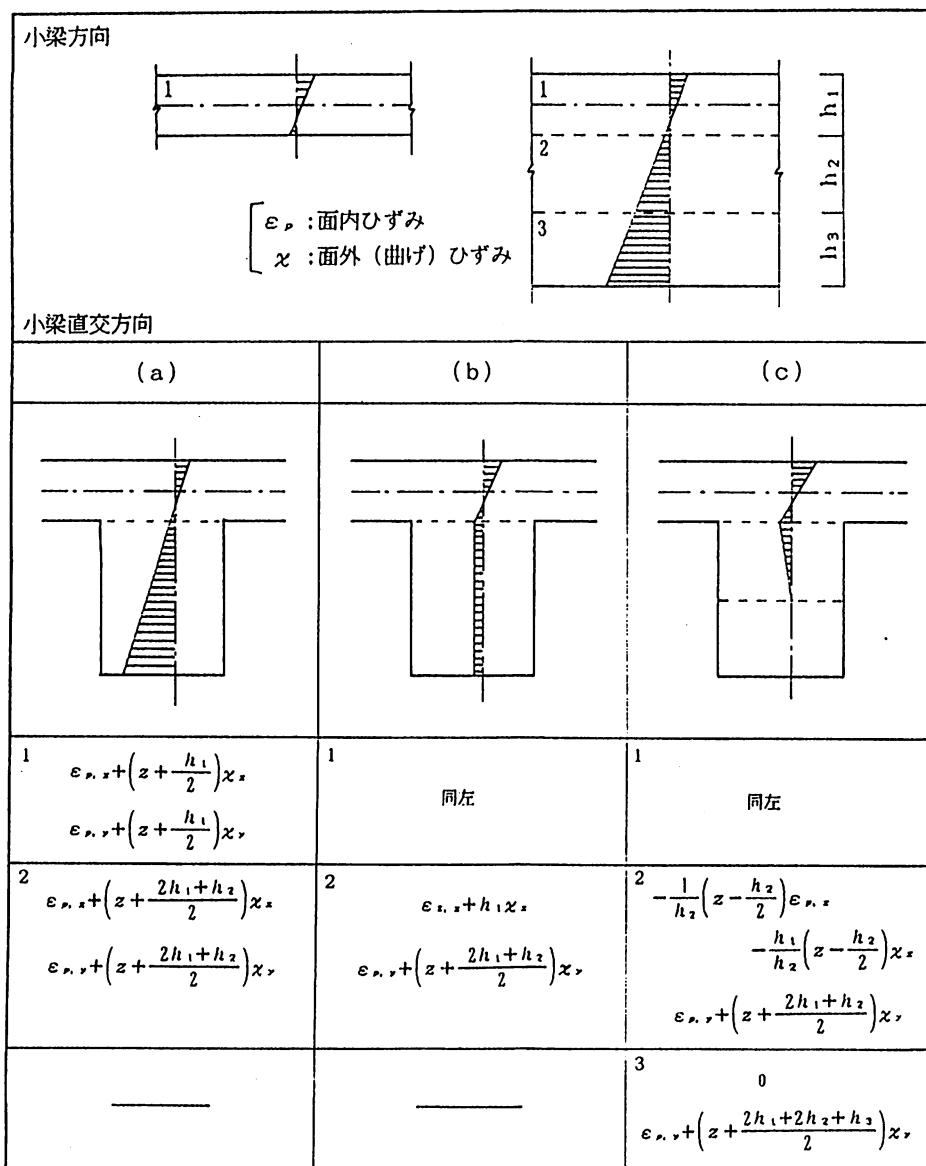


図-2.10 断面急変部のひずみ分布パターン

関数である。各層に関して式(2.36)のひずみを求め、各層の剛性マトリクスを構成し、その結果を足し合わせれば要素の剛性マトリクスが構成される。当研究で開発したプログラムでは、4段までの多段変厚板を扱えるようにしている。これに用いるひずみ分布としては、図-2.10に示す3種を設定している。各々のひずみ分布には、以下のような特徴を有する。

- 1) ひずみ分布(a)は、変厚板の厚肉部分の要素または小梁等の交差部の要素など、凸部の要素においても近似的に平面応力状態が成立すると考えられるものに適用する。
- 2) (c)の分布は、小梁など断面変化部の幅が辺長にくらべ十分に小さい場合の要素に適用する。先に示した小梁付床版の剛性マトリクスは、この分布の第2層の層厚(h_2)を0にした場合に相当する。 h_2 の値をどの程度に設定するかの問題は、今後、具体的な判断資料を用意する必要があるが、建築物の小梁、大梁等に関しては $h_2=0$ で十分と考えられる。
- 3) (b)の分布は、(a)と(c)の分布の中間的な分布であるが、実用的には解析結果に大きな差は表れないと考えられる。(a)と(c)の結果に大きな差があり、中間的な結果が必要な場合に用いる程度で良いと言える。

これらのひずみ分布の選択は、ある程度工学的判断を伴うものであるが、これは本来3次元解析が必要な対象を2次元として扱うことによる限界を表すものである。

これらに関する各種マトリクスも2.9章に示している。

2.3.3 棒要素の剛性マトリクス

鉄骨構造などでは、多くの部材が組み合わされて梁部材を構成している。これらを板要素として扱うと要素数がふえることになるが、棒材として扱い要素の接線に付加すれば、同じ結果を得るのに要素数を増やさなくてすむ。ここでは、この棒要素の剛性マトリクスの構成について示す。この場合にも、面内変位と面外変位の連成関係は板要素同様に確保されている。

板要素に合わせて、図-2.11のような棒要素を考える。これは梁の構成部材（例えば、H型鋼のウェップ部）などを考えて良い。

定式化においては、簡便のため、要素のねじり剛性は非連成として別個に扱う。棒要素の変位関数は各々、

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x, \quad v = \alpha_3 + \alpha_4 x \\ w &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 x^3 \end{aligned} \quad (2.37)$$

とする。x方向の各ひずみは、

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] = [0 \ 1 \ 0 \ 0] \{\alpha\} = [Q_P] [C_P]^{-1} \{\delta_P\} \quad (2.38)$$

$$\left[-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = [0 \ 0 \ -2 \ -6x] \{\beta\} = [Q_B] [C_B]^{-1} \{\delta_B\} \quad (2.39)$$

である。剛性マトリクスは、2.3.1章と同様な方法で求めることができ、面内変位(u, v)、面外変位(w, θ_x)に関して、

$$\begin{aligned} [k_{PP}] &= E t h [C_P]^{-1} {}^T \int [Q_P]^T [Q_P] dx [C_P]^{-1} \\ [k_{BP}] &= E t h d [C_B]^{-1} {}^T \int [Q_B]^T [Q_P] dx [C_P]^{-1} \end{aligned} \quad (2.40)$$

$$[k_{BB}] = E t \left\{ \frac{h^3}{12} + h d^2 \right\} [C_B]^{-1} {}^T \int [Q_B]^T [Q_B] dx [C_B]^{-1}$$

ここで、
t、h : 部材の幅、高さ

d : 基準点（版の上端面）から部材の中心までの距離

となる。なお、ねじり剛性については、 θ_x に1次の関数を設定すれば、

$$[J] = \frac{G J}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

となる。ここで l は梁の長さ(2a)である。これらにより剛性マトリクスを求めた結果は、2.9章に示した。

なお、y方向に関しては、

$$\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad \left(\theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.42)$$

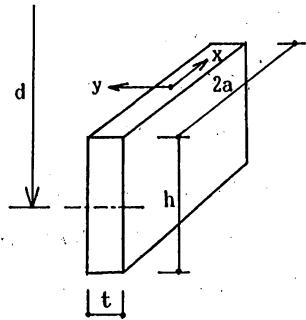


図-2.11 棒要素の条件および座標系

となるため、 $[C_B]^{-1}$ が x 方向の場合と若干異なるので注意が必要である。

2.

持

に

下

す
立で
に
な
が
立
て立
な
v
れ
い
は
方
合
変

2.3.4 質量マトリクスの構成^{30), 31), 32)}

質量マトリクスでは、断面変化部のひずみ分布の違いによる差は微少であり、全断面を一括して扱うものとする。また、回転慣性力についても、当研究で扱う板の形状では殆ど影響は無い。計算により検討では、200Hz程度の固有振動数に対する回転慣性の有無による影響は、1~1.5%程度であった。

微少変位理論において、断面内の位置 z での変位は式(2.19)同様に、

$$\begin{Bmatrix} u(z) \\ v(z) \\ w(z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u + \left(z + \frac{h}{2}\right) \left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ v + \left(z + \frac{h}{2}\right) \left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ w \end{Bmatrix} \quad (2.43)$$

と表される。 h は要素の全厚である。質量マトリクスを決定する変位は、断面中央面での変位 (u_0, v_0, w_0) で与えられるから、式(2.43)に $z=0$ を代入して、

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u + \frac{h}{2} \left(-\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ v + \frac{h}{2} \left(-\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ w \end{Bmatrix} \quad (2.44)$$

$$= [N_P] \{\alpha\} + [G] \{\beta\} = [N_P] [C_P]^{-1} \{\delta^P\} + [G] [C_B]^{-1} \{\delta^B\}$$

$$= [[N_P][C_P]^{-1}, [G][C_B]^{-1}] \begin{Bmatrix} \delta^P \\ \delta^B \end{Bmatrix} = [w] \{\delta^w\} \quad (2.45)$$

これより質量マトリクスは、

$$[m] = \rho \int_v [w]^T [w] dv \quad (2.46)$$

$$= \begin{bmatrix} m_{PP} & m_{PB} \\ m_{BP} & m_{BB} \end{bmatrix} \quad \text{ただし、}[m_{BP}] = [m_{PB}]^T \quad (2.47)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} [m_{PP}] &= \rho h [C_P]^{-1 T} \iint [N_P]^T [N_P] dx dy [C_P]^{-1} \\ [m_{PB}] &= \rho h [C_P]^{-1 T} \iint [N_P]^T [G] dx dy [C_B]^{-1} \\ [m_{BB}] &= \rho h [C_B]^{-1 T} \iint [G]^T [G] dx dy [C_B]^{-1} \end{aligned} \quad (2.48)$$

となる。

これらの各マトリクスの具体的な値は、2.9章にまとめて示した。

2.3.5 解析手法の限界

当研究で開発した断面急変板のFEM定式化方法は、任意の形状の床版を2次元で扱える有利性を持っているが、以下に示す解析上の限界も有している。

その一つは、有限要素法における変位関数の選定の問題である。本研究では、面内変位、面外変位に関して式(2.22)、式(2.23)の変位関数を用いており、これらより得られる各ひずみ成分を示すと以下の様になる（ただし、x方向について表示）。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = [0 \ 1 \ 0 \ y \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \{ \alpha \} = \alpha_2 + \alpha_4 y \quad (2.49)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} &= [0 \ 0 \ 0 \ -2 \ 0 \ 0 \ -6x \ -2y \ 0 \ 0 \ -6xy \ 0] \{ \beta \} \\ &= -2\beta_4 - 6\beta_7 x - 2\beta_8 y - 6\beta_{11} xy \end{aligned} \quad (2.50)$$

すなわち、x方向の面内ひずみは一定であり、面外ひずみはxの1次式となる。ここで、断面内の中立軸の位置は、

$$\zeta = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) / \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (2.51)$$

で与えられる。この場合、要素内で中立軸が任意の値をとり得るためには、明らかに面内ひずみはxに関する1次式以上でなくてはならず、現状の変位関数では厳密な面内と面外の連成関係を表現できない。例えば、要素内で、中立軸位置が一定でたわみが変化している状態を考えた場合、面内ひずみが一定でも曲げのひずみが変化するため、中立軸の位置が変わることになる。すなわち、解析上の中立軸は実際の中立軸と要素内の一点で一致しているにすぎず、要素内全体での完全な適合は確保できていないことになる。したがって、中立軸の要素内での変化が極端に大きい場合には、分割数を十分にとらないと誤差が大きくなることになる。

もう一つの大きな問題は、x, y各方向の中立軸の問題である。実際の構造では、x, y方向の中立軸は必ず一致しているが、当解析の定式化では両方向の中立軸位置の一致は必ずしも保証されていない。すなわち、曲げによるたわみはx, y方向に関して共通であるが、面内のx, y方向の変位u, vは式(2.22)の変位関数の通り互いに独立に設定されているため、これらのひずみの比として決定される中立軸の位置は各方向で必ずしも一致しない。面内成分の影響のない場合（例えば平板）、あるいは影響が小さい場合には、この中立軸の不一致の心配はないが、ポアソン比の大きな材料については誤差が大きくなる場合がある。また当然のことながら、この影響は、2方向に補剛された板より1方向の補剛板において大きくなる。

以上の問題はいずれも面内の変位関数に関する問題であり、当研究でも、これらの問題に完全に適合する、X, Y両方向に共通の変位関数を探して種々検討したが、結局見つけるには至らなかった。この変位関数の選定問題は、この種のFEM解析に関して極めて重要な問題であり、今後の課題である。

2.4 FEMによる振動解析

振動解析に関して、次の2つの解析プログラムを開発した。

- 1) FEMによる矩形板の固有値解析プログラム
- 2) FEMによる矩形板の時刻歴振動応答解析プログラム

以上の2プログラムとも、面内・面外変位連成型のFEMである。

2.4.1 固有値解析プログラムと解析手法

固有値解析は、床版の固有振動数や固有振動モードを解析的に求め、床版の基本的振動特性の把握を行うためのものである。したがって、低次の主要な固有値、固有モードを効率よく求めることが重要であり、ここでは同時反復法の一種であるサブスペース法³³⁾を用いた。

2.3章で求まる全体系の剛性・質量マトリクスに拘束条件を考慮したものと $[K_r]$, $[M_r]$ とする。
自由振動の運動方程式は、

$$[M_r]\{\ddot{X}\} + [K_r]\{X\} = \{0\} \quad (2.52)$$

であり、 $\{X\} = \{x\} e^{i\omega t}$ であるから、式(2.52)は、

$$(-\omega^2[M_r] + [K_r])\{x\} = \{0\} \quad \omega : \text{各振動数} \quad (2.53)$$

$$\text{書き換えると、} [K_r]\{x\} = \lambda[M_r]\{x\}, \quad \lambda = \omega^2 \quad (2.54)$$

であり、MK型の固有値問題となる。なお、サブスペース法の解析手順は以下の通りである。

<解析手順>

1) 準備

求める固有モードの数m個分の出発ベクトル $\{x_1\}, \dots, \{x_m\}$ を用意し、

$$[X] = [x_1 \dots x_m] \quad (2.55)$$

とする。プログラムでは、ジェニングスの方法を用いて出発ベクトルを作成³⁴⁾している。これは、-0.5~0.5の値をランダムに発生させたものである。

2) 乗算

$$[Y] = [K_r]^{-1}[M_r][X] \quad (2.56)$$

3) 部分空間への射影

$$[K] = [Y]^T[K_r][Y] \quad (2.57)$$

$$[M] = [Y]^T[M_r][Y] \quad [K], [M] \text{ は } m \times m \text{ の対称マトリクスである。} \quad (2.58)$$

4) 部分空間での固有値解析

$$[K]\{p\} = d[M]\{p\} \quad (2.59)$$

この解法としては、一般化ヤコビ法⁵⁾を用いた。 $\{p\}$ は固有ベクトルである。

5) 原空間への変換

$$\text{新}[X] = [Y]\{p\} \quad (2.60)$$

6) 収束判定

未収束の場合は2)へ戻る。収束した時点で $d_1 \sim d_m$ が固有値となり、 $[X]$, $[Y]$ が固有ベクトルとなる。この時、「 P 」は単位マトリクスとなる。

2.4.2 時系列応答解析プログラムと解析手法

応答解析の手法としては、大きく分けて、周波数領域でのモーダルアナリシスと時間領域での時間積分法がある。床版の音響域振動解析では、対象周波数を少なくとも500Hz程度までは考慮することが必要であり、基本的にこれを取り扱えることが条件となる。小梁付床版の場合では、平板に較べ固有値がかなり密にならぶことになるため、モーダルアナリシスでは固有値が対象周波数内でかなり高次になる場合がでてくるとともに、各スペクトル毎に多元連立方程式を解かねばならないため、音響分野で一般的な一定帯域幅の結果を求ることについては効率的ではない。また解析手法の汎用性を考えた場合には、種々の加振力あるいはその組み合わせ外力を時間的・空間的な限定を受けずに自由に設定できることが大きな要点となるが、一般的なモーダルアナリシスでは、加振力の設定条件にかなりの制限を生じる。一方、時間積分法は、計算の時間的効率はモーダルアナリシスに劣る面はあるが、計算対象に対する自由度の面では他の方法より優れた特質を持っている。また、振動と音の両方に關して、過渡的現象の直接的理解・究明には有利である。これらの理由により、ここでの応答解析手法としては、時間積分法による時刻歴応答解析が基本的に有利であると考え、これを採用している。具体的な解析方法としては、線形加速度法の一種ではあるが、解析の時間刻み幅 (Δt) によらず絶対的な安定が保証されているウイルソンのθ法³³⁾を用いた。

床版に外力が作用した時の運動方程式は、

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{F\} \quad (2.61)$$

である。 $[M]$, $[C]$, $[K]$ は各々、質量、減衰、剛性マトリクスである。これを、ウイルソンのθ法による時系列解析により解く。この方法ではθの値を1.37以上にとれば、時間の刻み幅によらず解の安定が得られる。実用的な値は1.4が用いられる。具体的な方法は以下の通りである。

今、区間 $[t, t + \theta \Delta t]$ で加速度が直線的に変化すると仮定すると、時刻 $t + \theta \Delta t$ の変位、速度は、(以下の変数は、ベクトルおよびマトリクスであるが、簡便のため数式表示とする。)

$$x(t + \theta \Delta t) = x(t) + \theta \Delta t \dot{x}(t) + \frac{(\theta \Delta t)^2}{3} \ddot{x}(t) + \frac{(\theta \Delta t)^2}{6} \ddot{x}(t + \theta \Delta t) \quad (2.62)$$

$$\dot{x}(t + \theta \Delta t) = \dot{x}(t) + \theta \Delta t \frac{\ddot{x}(t) + \ddot{x}(t + \theta \Delta t)}{2} \quad (2.63)$$

と書くことができる。また運動方程式より、

$$M\ddot{x}(t + \theta \Delta t) + C\dot{x}(t + \theta \Delta t) + Kx(t + \theta \Delta t) = F(t + \theta \Delta t) \quad (2.64)$$

式(2.62)より

$$\ddot{x}(t + \theta \Delta t) = \frac{6}{(\theta \Delta t)^2} x(t + \theta \Delta t) - \frac{6}{(\theta \Delta t)^2} x(t) - \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{x}(t) - 2\ddot{x}(t) \quad (2.65)$$

式(2.65)を式(2.63)に代入して

$$\dot{x}(t + \theta \Delta t) = \frac{3}{\theta \Delta t} x(t + \theta \Delta t) - \frac{3}{\theta \Delta t} x(t) - 2\dot{x}(t) - \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{x}(t) \quad (2.66)$$

式(2.65)、式(2.66)を式(2.64)に代入して、 $x(t + \theta \Delta t)$ について解くと、

$$x(t + \theta \Delta t) = \left\{ K + \frac{3}{\theta \Delta t} C + \frac{6}{(\theta \Delta t)^2} M \right\}^{-1} \times \\ \left[M \left\{ 2 \ddot{x}(t) + \frac{6}{\theta \Delta t} \dot{x}(t) + \frac{6}{(\theta \Delta t)^2} x(t) \right\} + \right. \\ \left. C \left\{ \frac{\theta \Delta t}{2} \ddot{x}(t) + 2 \dot{x}(t) + \frac{3}{\theta \Delta t} x(t) \right\} + F(t + \theta \Delta t) \right] \quad (2.67)$$

となる。式(2.67)の右辺はすべて既知量であるから、これは計算できる。この値を式(2.65)に代入し $\ddot{x}(t + \theta \Delta t)$ を求め、これより直線補間を行い $t + \Delta t$ の値を求める。以上の結果、

$$\ddot{x}(t + \Delta t) = \left(1 - \frac{1}{\theta} \right) \ddot{x}(t) + \frac{1}{\theta} \ddot{x}(t + \Delta t) \quad (2.68)$$

$$\dot{x}(t + \Delta t) = \dot{x}(t) + \frac{\Delta t}{2} \{ \ddot{x}(t) + \ddot{x}(t + \Delta t) \} \quad (2.69)$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \Delta t \dot{x}(t) + \frac{\Delta t^2}{6} \{ 2 \ddot{x}(t) + \ddot{x}(t + \Delta t) \} \quad (2.70)$$

が得られる。以上が、ウイルソンのθ法の計算アルゴリズムである。

このウイルソンのθ法は、解の発散を抑えるため、解法自体がローパスフィルター的働きを有しており、対象周波数に対する時間の刻み幅 ($\Delta t / T$, T は対象周波数の周期) が大きくなると、解析値の振幅が減少し周期が長くなる（図-2.12参照³⁵⁾）。今、 $\theta = 1.4$ とし Δt をオクターブバンド中心周波数 (f_o) の周期の $1/10$ とした場合には、振幅の誤差は帯域 $f_L < f_o < f_U$ に対し各々、 -0.3 , -0.6 , -1.1 dBとなる。同じく $1/20$ としたときには、 0 , -0.1 , -0.3 dBとなる。したがって、時間刻み幅としては、 $\Delta t = 0.1 f_o$ 程度で十分と考えられる。なお、この時の周期の誤差は $3\sim 9\%$ 、ナイキスト周波数は $f_N = 5 f_o$ 、スペクトル間隔は $N=1024$ でバンド幅の約 $1/200$ となる。

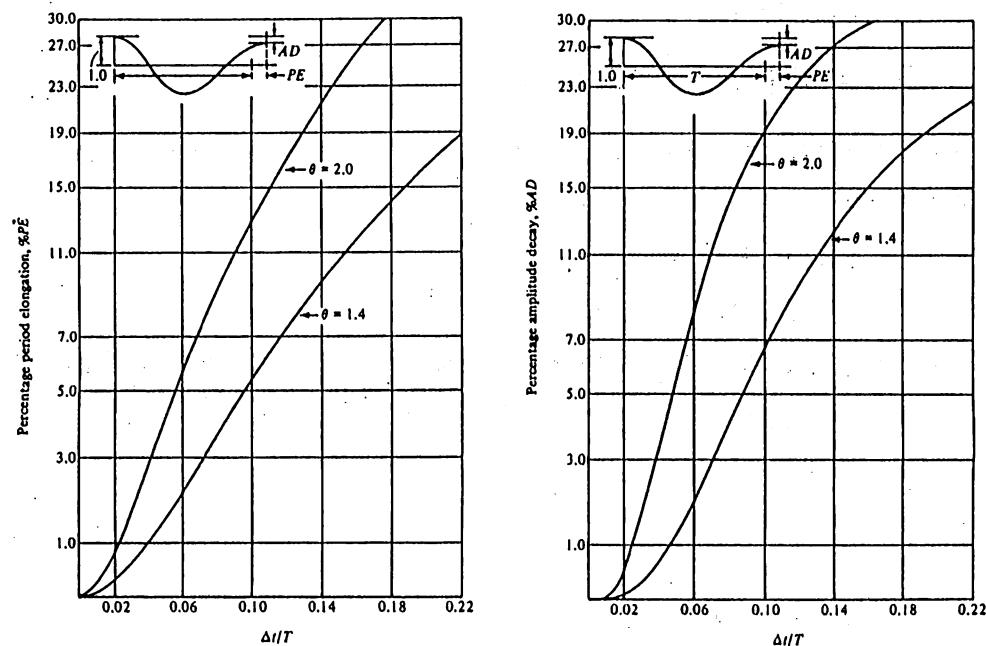


図-2.12 ウイルソンのθ法における周期および振幅に対する刻み幅の影響

2.4.3 減衰項の評価

床の振動に限らず、一般振動問題においても減衰の定量的評価を行うことはなかなか困難であり、近似的な取扱いが不可避となってくる。一般に減衰と呼ばれるものには、(イ)外部粘性減衰、(ロ)内部粘性減衰（構造減衰）、(ハ)履歴減衰（これは微少につき通常無視される）などの他に、(ニ)逸散減衰（床構造から周辺部分へ透過・逸散するエネルギー）などが存在する。

また計算方法に関しては、音響分野では一定帯域での評価が中心となることから、各帯域ごとに帯域内の周波数特性を任意に設定できることが重要となる。

減衰マトリクスの表現はコーシーの方法³⁶⁾によれば、

$$[C] = [M] \sum_b \alpha_b [[M]^{-1} [K]]^b \quad (b=0,1,2,\dots) \quad (2.71)$$

となる。この式では、 b の値を大きくとり項数を増やせば、種々の特性を表現することができるが、FEMでは計算時間が極端に増大してくるため現実的ではない。また帯域計算の場合は、式(2.71)の第2項までを用いたRayleigh-dampingで実用上十分と考えられる。すなわち、帯域の上下の遮断周波数での減衰値を設定し、これにより式(2.71)の係数を決定すればよい。この場合、上下の遮断周波数での減衰値を等しくとれば、帯域内の減衰値はほぼ一定になる。

Rayleigh-dampingによる減衰マトリクスの構成は以下の通りである。まず、要素レベルにおいて、(イ)の外部粘性減衰は変位速度に比例するから、

$$\{f_a\} = \alpha' \{\dot{\delta}\} \quad (2.72)$$

であり、これによる減衰マトリクスは質量マトリクスと同様の表現により、

$$[C_f] = \alpha' \int [N]^T [N] dV = \alpha [M] \quad (2.73)$$

となる。一方、(ロ)の内部粘性減衰はひずみ速度に比例するから、

$$\{\sigma_a\} = \beta' [D] \{\epsilon\} \quad (2.74)$$

$$[C_s] = \beta' \int [B]^T [D] [B] dV = \beta [K] \quad (2.75)$$

と、剛性マトリクスと同様の形式となる。式(2.71)によるRayleigh-dampingは、これらの1次結合として表されるものであり、

$$[C] = \alpha [M] + \beta [K] \quad (2.76)$$

となる。これは、式(2.71)において、 $b=1$ とした時に同じである。

式(2.76)の α と β の係数に関しては、固有モードの減衰定数との間に下記の様な関係がある。粘性減衰系の運動方程式との比較から、

$$2h_i \omega_i = \alpha + \beta \omega_i^2 \quad (2.77)$$

となり、これより

$$h_i = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i^2}{2} \quad (2.78)$$

となる。したがって、 α 、 β は2つの固有モードの減衰定数、あるいは図-2.13に示す最低減衰定数を与える固有振動数($\omega_0 = \sqrt{\alpha/\beta}$)とその減衰定数によって決定することができる。帯域計算では、2つの固有周波数の代わりに、2つの遮断周波数を設定すればよいことになる。

減衰に関しては、3.4章で改めて若干の検討を行っている。また、 α 、 β の設定方法の詳細は5.1.4章に示している。

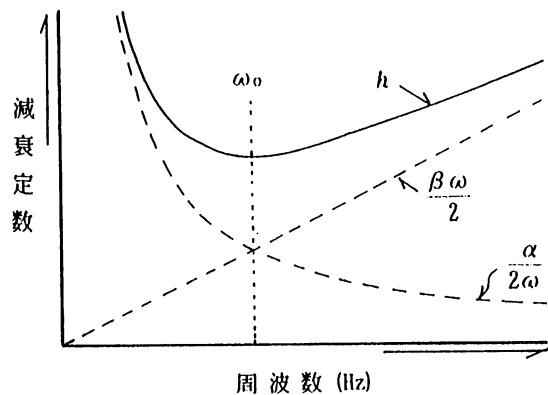


図-2.13 Rayleigh-dampingの周波数特性

2.5 解析プログラムの概要および特徴

当研究の床版の振動解析プログラムとして開発した、面内・面外連成型有限要素法の概要と特徴を具体的に紹介する。理論についてはすでに示したが、当方法の最も大きな特徴は、図-2.14に示すような任意の断面形状の板を、層別に分けることにより2次元問題として取り扱えることである。すなわち、層別化された各層に関して、層内のひずみ分布に対応した剛性マトリクスを作成し、それを合成することにより要素の剛性マトリクスを構成する。この方法によれば、原則的にはいかなる断面形状の板も解析可能である。

固有値解析と時刻歴応答解析プログラムの概要を表-2.1にまとめて示した。その他、一般のFEMプログラムとは異なる点について以下に詳述する。

2.5.1 ひずみ分布の設定

各層のひずみ分布の設定は、 x , y 各方向に関して、面内ひずみと曲げによるひずみ（面外ひずみ）が存在するか否かを入力する。ひずみ分布の式は、2.3.2章の式(2.36)の通りであり、この α_x , β_x , α_y , β_y により設定する方式である。すなわち図-2.9に示す小梁付床版のひずみ分布については、第1層では面内と面外の両方のひずみが寄与し、第2層では y 方向のひずみだけが存在するため、

$$\begin{aligned} \text{第1層} &: (\alpha_x, \beta_x, \alpha_y, \beta_y) = (1, 1, 1, 1) \\ \text{第2層} &: (\alpha_x, \beta_x, \alpha_y, \beta_y) = (0, 0, 1, 1) \end{aligned} \quad (2.79)$$

となる。

2.5.2 境界条件の設定

通常の平板の曲げ問題と異なり、ここでは面内変位と面外変位の各々について境界条件を設定しな

表-2.1 解析プログラムの概要

プログラム	理 論	変位関数 および自由度	解析手法	質量マトリクス	減衰マトリクス
矩形板の 固有値解析	面内・面外 変位連成を 考慮した	面内変位 Argyris's (u, v)	サブスペース法	consistent mass matrix	—
矩形板の 振動応答解析	有限要素法	面外変位 Adini, Clough & Melosh's	ウイルソンの θ 法		Rayleigh damping $\alpha[K] + \beta[M]$

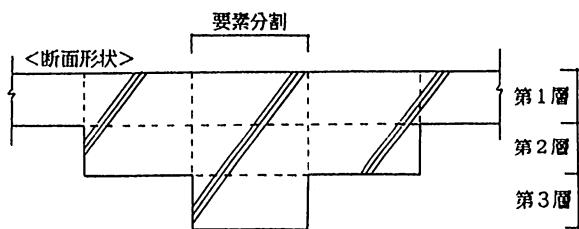


図-2.14 多段変厚板の層別化による取扱い

ければならない。節点の拘束条件は図-2.9の変位で表され、1を拘束、0を自由とし、面外は例えば

$(w, \theta_x, \theta_y) = (101)$ 、面内は $(u, v) = (10)$ となる。面外変位と面内変位との拘束条件には一定の対応関係があり、 x あるいは y 方向に回転が許される場合には、その方向の面内変位が生じるが、回転が拘束される場合には面内変位は生じない。したがって、代表的な条件について示せば表-2.2のようになる。

表-2.2 境界条件の設定と面内・面外変位の対応 (X方向に関して)

境界条件	面内変位 (u, v)	面外変位 (w, θ_x , θ_y)
単純支持	1 0	1 0 1
回転のみ拘束	0 1	0 1 0
完全固定	1 1	1 1 1

1: 拘束, 0: 自由

2.5.3 加振力の種類と設定

加振力の設定には、図-2.15の説明図に示すA～Dの4種のパターンを用意し、これらの重ね合わせにより種々の状態を表現する。

- ・ Aパターン

正弦半波の断続波形を表現するものであり、これはおもに断続的に衝撃が加わる機械の加振力とか人の歩行を入力する場合に用いる。入力する節点は自由であるから、これにより人が歩行する条件もそのまま入力できる。

- ・ Bパターン

連続正弦波の場合である。加振位置、周期、位相、振幅を自由に設定できる。

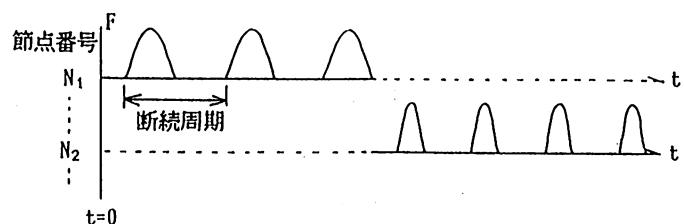
- ・ Cパターン

ランダムはの断続波形を表す。入力設定値は、最大値と実効値の2種が選べる。

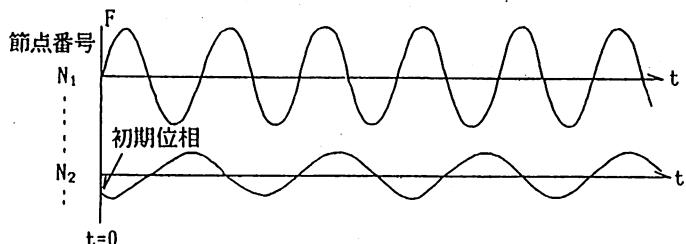
- ・ Dパターン

連続したランダム波を表す。入力条件はCパターンと同様である。各パターン内の条件の組み合わせ、およびこれらのパターンの組み合

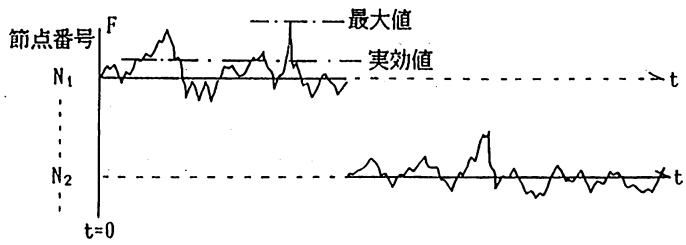
(A) 正弦半波の断続波形



(B) 正弦波の連続波形



(C) ランダム波の断続波形



(D) ランダム波の連続波形

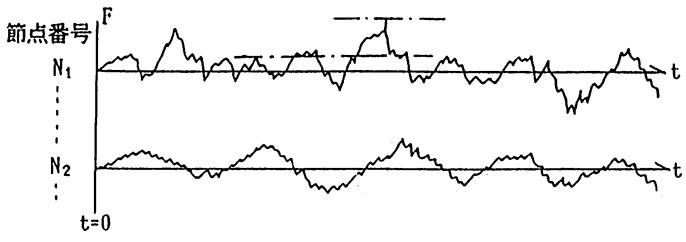


図-2.15 各種加振力パターン

わせにより、殆どの時間的・空間的加振条件を表現できる。

2.5.4 出力情報および出力例

出力情報は以下の通りである。

- ・固有値解析

各次数の固有振動数、固有振動モード、およびその各節点変位（これより式(2.51)により中立軸の位置も求まる）。

- ・振動応答解析

応答変位、速度、加速度の各最大値分布、および各実効値分布。最大を記録した時の計算時刻および振動モード。各節点の応答振動波形およびそのフーリエスペクトル。指定した面積部分の各応答値の平均値などである。参考に出力例を図-2.16に示した。

これらの他、当方法の特徴を挙げると以下のようになる。

- ⅰ) 要素形状は、簡便のため長方形要素のみに限定している。
- ⅱ) 要素の削除（中抜き板の解析などに用いる）、付加質量の付加、並進・回転バネの付加が可能。
- ⅲ) 棒要素の入力が可能。鉄骨梁などの部材は、図-2.17に示すように、各構成部材に分解して棒要素の合成として取り扱えば、梁部材の断面形状が考慮でき、床版を含めた全断面の中立軸も自動的に解析過程で考慮される。

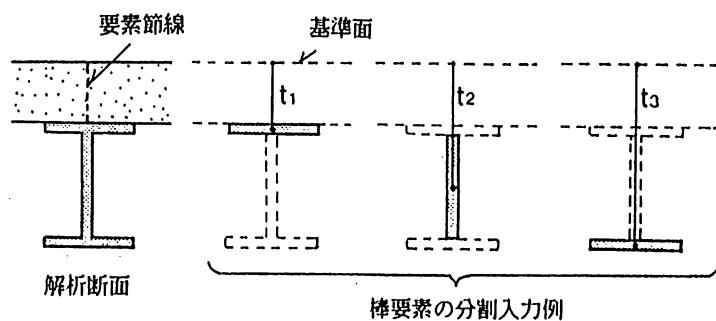


図-2.17 棒要素を用いた任意断面の取扱い方法

XX
X TRANSIENT RESPONSE ANALYSIS OF RECTANGULAR PLATE X
X SUBJECTED TO TRANSVERSE FORCE (KONOIKEGUMI T.R.L) X
X XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

*** TITLE OR MEMO ***

*** BEAM-ELEMENT CHECK ***

*** INPUT DATA LIST ***

/ MATERIAL /

YOUNG'S MODULUS -----	0.210E+10 (KG/M**2)	POISSON RATIO -----	0.
DENSITY -----	2400.0 (KG/M**3)	THICKNESS(PLATE) -----	0.120 (M)
X-LENGTH -----	3.000 (M)	Y-LENGTH -----	2.000 (M)
X-DIVISION -----	11	Y-DIVISION -----	8
DAMPING ALFA -----	6.107000	DAMPING BETA -----	0.000147

/ CALCULATION /

TIME PITCH -----

/ BOUNDARY CONDISION /

IN-PLANE

TUZUK	1	8
TUZUK	1	11
TUZUK	9	11
HASIA	100	8

*** DISTRIBUTION OF ROOT MEAN SQUARE ***

CONTENTS	1	DISPL.
MEAN TIME (MSEC)	1	
MAXIMUM	1	
MEAN VALUE	1	
IN TIME AND SPACE	1	

TABLE-

0.00	0.33	0.62	0.84	0.97	1.00
0.	0.32	0.60	0.82	0.95	0.98
0.	0.30	0.57	0.77	0.89	0.92
0.	0.27	0.51	0.69	0.80	0.83
0.	0.23	0.44	0.59	0.68	0.71
0.	0.18	0.34	0.46	0.54	0.56
0.	0.13	0.24	0.32	0.37	0.38
0.	0.06	0.12	0.16	0.19	0.19
0.	0.----	0.----	0.----	0.----	0.----

TABLE- RMS DISTRIBUTION (DISPLACEMENT)

図-2.16 応答解析の出力例

